Cap. 2 Técnicas de Resolução em Optimização Combinatória

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Cap. 2 Técnicas de Resolução em Optimização Combinatória

Bibliografia

- F.S. Hillier; G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 8th ed., McGraw-Hill, 2005.
- G.L. Nemhauser, L. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1999.

Hipóteses de PL

- ~~**Divisibilidade**~~

  quantidades discretas → **MODELOS DISCRETOS**

- ~~**Aditividade** e **Proporcionalidade**~~

  descontinuidades
  não-linearidades → **MODELOS DISCRETOS** / **PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR**

- ~~**Certeza**~~

  estimativas de parâmetros → **ANÁLISE DE SENSIBILIDADE (WHAT-IF)** / **PARAMETRIZAÇÃO** / **PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA**

- ~~**Objectivo Único**~~

  múltiplos objectivos → **PROGRAMAÇÃO MULTI-OBJECTIVO**

Programação Linear Inteira (PLI)

- Um **Problema de Programação Linear Inteira (PLI)** é um PL em que todas (**PLI puro**) ou parte (**PLI misto**) das variáveis só podem assumir valores inteiros.
- **Variáveis inteiras** – para representar quantidades indivisíveis
- **Variáveis binárias** – para decisões Sim/Não – **Programação Binária**

Problemas de Optimização Combinatória – a solução óptima é um subconjunto de um conjunto finito. Problemas que poderiam ser resolvidos por enumeração! Crescimento exponencial!

- **Exemplos**: Afectação (n!); Mochila (2^n); Cobertura (2^n); Caixeiro Viajante (n-1)!; etc.

- Com enumeração apenas se conseguem resolver problemas de pequenas dimensões!

n	log n	$n^{0.5}$	n^2	2^n	n!
10	3.32	3.16	10^2	1.02×10^3	3.60×10^6
100	6.64	10.00	10^4	1.27×10^{30}	9.33×10^{157}
1000	9.97	31.62	10^6	1.07×10^{301}	4.02×10^{2567}

- Dado um PLI como identificar a SO**?** Como impor condições de paragem num algoritmo de resolução de problemas de PLI**?**
- **Minorantes ; Majorantes**

Aplicações

- Análise de investimentos
- Selecção de projectos
- Localização de equipamentos (hangares, carros de apoio) ou de equipas de emergência e de apoio técnico
- Distribuição; Rotas; Carregamento
- Desenho de redes (comunicações)
- Escalonamento de pessoal; de veículos e de equipamentos

Resolução

- Algoritmos Exactos
  - **branch-and-bound** (Land, Doig, 1960) (Little, Murty, Sweeney, Karel, 1963)
  - **planos de corte** (Gomory, 1960)
- Métodos Não Exactos
  - **Técnicas de arredondamento**
  - **Heurísticas**
    - básicas; construtivas; pesquisa local; metaheurísticas;
    - inspiração social: pesquisa tabu; *ant colonies*
    - inspiração física: *simulated annealing*
    - inspiração biológica: genéticos; redes neuronais
  - **Relaxações; Métodos de Subgradiente**
- Software
  - **Excel/Solver**
  - **Visual Basic**
  - CPLEX
  - LINGO; LINDO

- PLI de Minimização: $z^* = Min\left\{\mathbf{cx} : \mathbf{x} \in P \cap X,\, X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$
  - Majorantes - Heurísticas
  - Minorantes!

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

- Como avaliar a qualidade de uma SA**?**

- Minorantes (limites duais)
  - **Relaxação**
    - ideia: substituir um problema difícil de resolver por um mais simples e cujo valor óptimo não exceda z^*
    - "Aumentar" a RA; Substituir a FO por outra função que nunca exceda a FO inicial

Def.: Um problema (PR): $z_R = Min\left\{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P \subseteq \mathbf{R}^n \right\}$ (PLR)

é uma **Relaxação** de um (PI) de minimização:

$$z = Min\left\{ \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{R}^n \right\} \quad \text{(PLI)}$$

se: $P \supseteq X \quad \wedge \quad f(\mathbf{x}) \leq c(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in X$

Teor.: Se (PR) é relaxação de (PI), então: $z_R \leq z$

- Como construir relaxações "interessantes" ?

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

- A **relaxação linear** de um PLI é o problema de PL que resulta do PLI por omissão das restrições de integralidade.

- Dado um (PLI) de minimização: $z = Min\left\{\mathbf{cx}:\mathbf{x} \in X \cap \mathbf{Z}^n\right\}$

  a Relaxação Linear (PLR) é: $z_{RL} = Min\left\{\mathbf{cx}:\mathbf{x} \in X\right\}$

  - É relaxação pois: $X \cap \mathbf{Z}^n \subseteq X$ e a FO não se altera!
  - Logo: $z_{RL} \leq z$

Teor.:

(i) Se a relaxação (PLR) é impossível, o problema inicial (PLI) é impossível;

(ii) Seja $\mathbf{x}^*$ uma SO de (PLR). Se $\mathbf{x}^* \in \mathbf{Z}^n$ então, $\mathbf{x}^*$ é SO de (PLI).

- Outras relaxações para problemas conhecidos:
  - Árvore geradora mínima com restrições de capacidade
  - Árvore geradora mínima com restrições de grau
  - Roteamento: Nodos; Arcos; Gerais
    - TSP orientado
    - TSP não-orientado (simétrico)
    - ARP orientado
    - ARP não orientado:

- Exemplo: Considere-se o (PLI)

$$z^* = Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 & \text{(R1)} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

Solver...

- Resolver o (PLI)
- Resolver a relaxação linear (PLR)
- Resolver o (PLI) sem uma das restrições funcionais (R1)

Exemplo

- Graficamente - PLR

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \cancel{\mathbb{Z}_0^+} \geq 0 \end{cases}$$

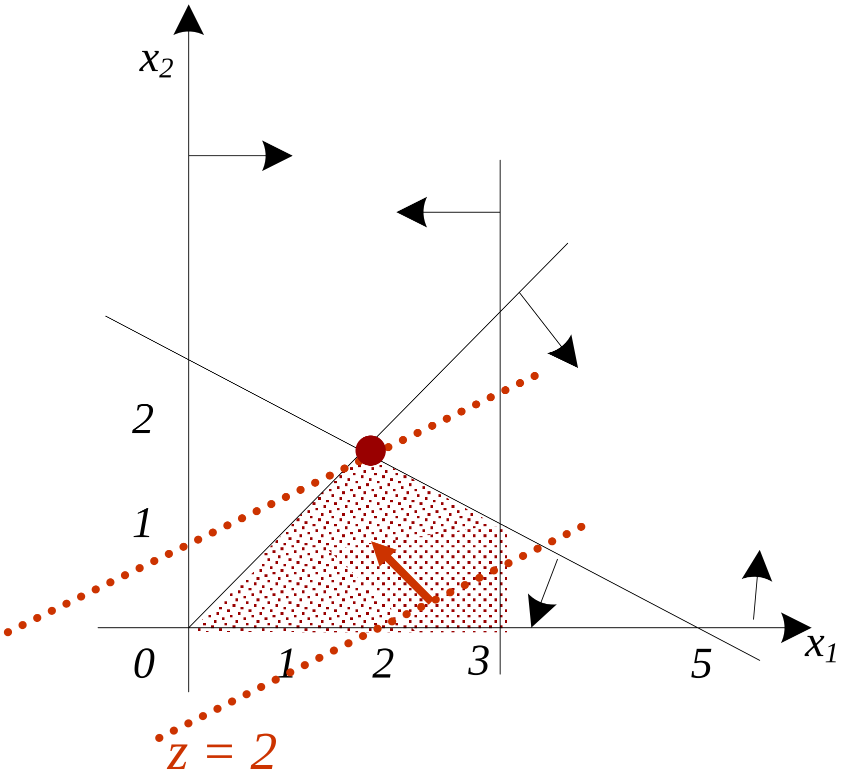
Exemplo

- Graficamente - PLR

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \cancel{\in Z_0^+} \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_{RL} = \left(x_1^{RL} \; ; \; x_2^{RL}\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \qquad z_{RL} = -\frac{5}{3}$$



- SA de PLI: $\mathbf{x} = (0{,}0)$

$$\boxed{z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = z_{(0,0)}}$$

Exemplo

- Graficamente - PLI

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

Exemplo

- Graficamente - PLI

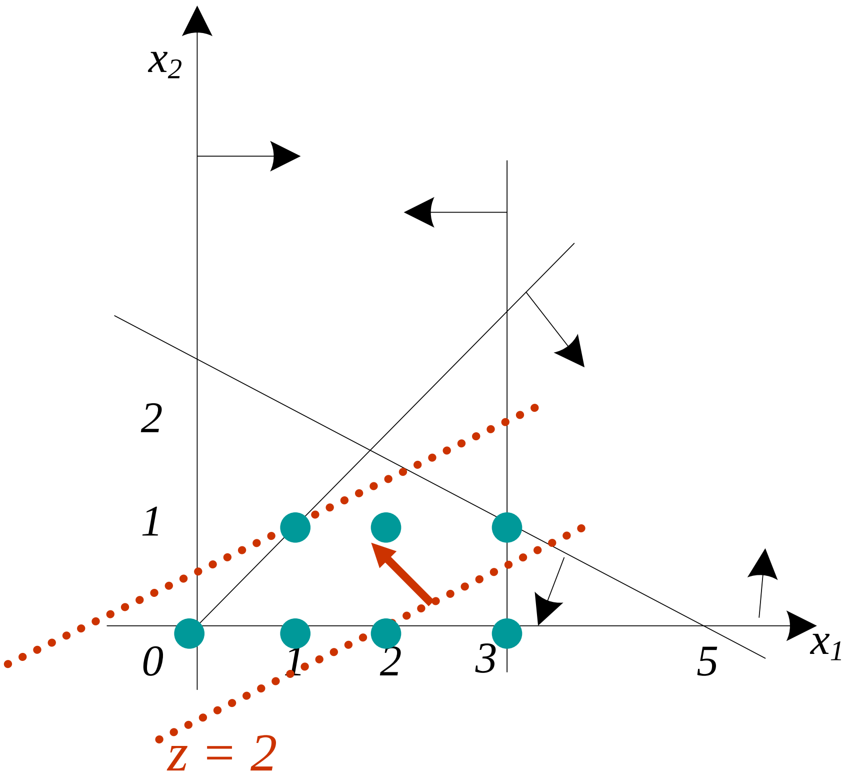
$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$\mathbf{x}^* = (1;1)$$

$$z^* = -1$$

$$z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* = -1 \leq 0 = z_{(0,0)}$$



Exemplo

- Graficamente – PLI sem 1ª restrição

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

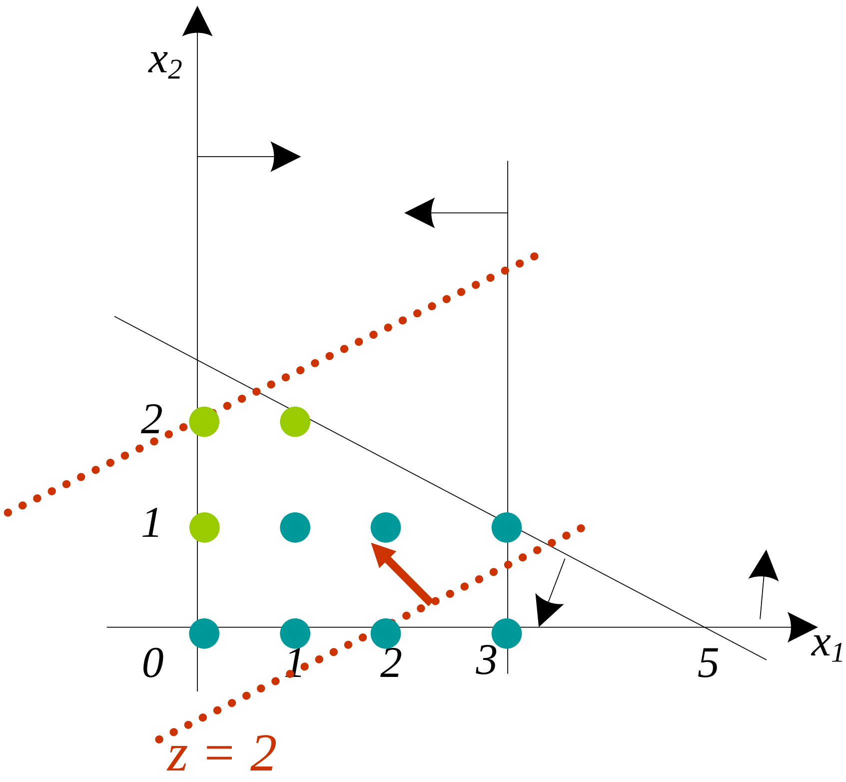
$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

Exemplo

- Graficamente – PLI sem 1ª restrição

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$



$$\tilde{\mathbf{x}} = (0\,;2)$$

$$\tilde{z} = -4$$

- Dualidade – obtenção de minorantes!
- O valor de qualquer SA dual é um minorante para o valor óptimo do PLI (de minimização)

Teor.: Dualidade Fraca: $w(\mathbf{u}) \leq z(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in X,\ \forall \mathbf{u} \in U$

Teor.: Dualidade Forte:

dado um par de problemas duais, se um tem SO, então o outro também tem e os valores óptimos dos dois problemas coincidem

$$w^* = z^*$$

- Dado um PLI de minimização: $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \cancel{\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$
- Uma relaxação de PLI é o problema: $z' = Min\left\{\mathbf{cx} : \mathbf{x} \in X\right\}$
- Se juntarmos as restrições "complicadas" à FO considerando multiplicadores obtemos, para $\mathbf{u} = \left(u_1, \ldots, u_m\right)$ fixo, o problema:

PLI(u): $z\left(u\right) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}\left(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\right) : \mathbf{x} \in X\right\}$

- PLI($\mathbf{u}$) é uma relaxação de PLI – Relaxação Lagrangeana
- $\mathbf{u}$ é o vector de multiplicadores de Lagrange – variáveis duais!

- PLI($\mathbf{u}$) é uma relaxação de PLI, pois:

$$X \supseteq \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$$

$$\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \leq \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$$

Teor. Fraco da Dualidade Lagrangeana: $z(u) \leq z, \forall u \geq 0$

- Pretendemos obter o máximo valor de $z(\mathbf{u})$, resolvendo o Dual Lagrangeano:

$$w_{DL} = \mathbf{max}\{z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$$

Restrições Relaxadas $\geq$ ou $=$

- Dualidade Lagrangeana! – se podemos obter apenas minorantes com o problema dual (de difícil resolução!) – com a Dualidade Lagrangeana podemos reforçar tais limites!

- Árvore geradora mínima com restrições (capacidade ou grau)
  - SST
  - com restrições relaxadas penalizadas e juntas à f.o.!

Exemplo

- Retome-se o PLI

$$Min \quad z = x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} \cancel{x_1 - x_2 \geq 0} \\ \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{array}\right\} X \end{cases}$$

$$\mathbf{x} \in X$$

- Definir a função Dual Lagrangeana

PLI(u): $$z(u) = \underset{\mathbf{x} \in X}{Min} \left\{ x_1 - 2x_2 + u(0 - x_1 + x_2) \right\}$$

$$= \ldots$$

Exemplo

- Função Dual Lagrangeana

Exemplo

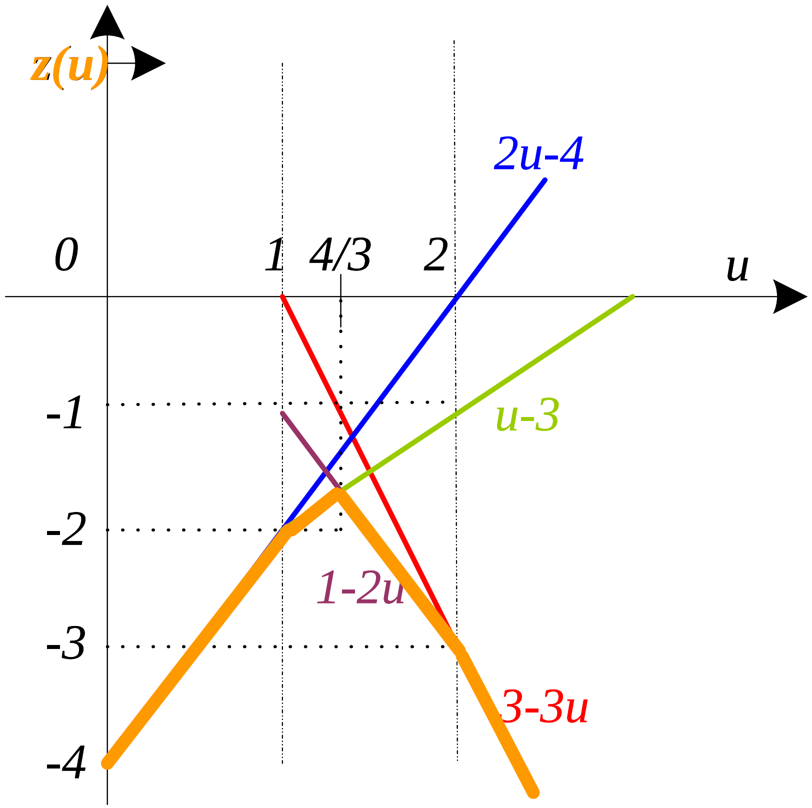
- Função Dual Lagrangeana

$$z(u)=\begin{cases} 2u-4 & \text{se} \quad 0\le u\le 1 \\ u-3 & \text{se} \quad 1\le u\le \frac{4}{3} \\ 1-2u & \text{se} \quad \frac{4}{3}\le u\le 2 \\ 3-3u & \text{se} \quad u\ge 2 \end{cases}$$

$$w_{DL}=\max_{u\ge 0}\{z(u)\} \Rightarrow u=4/3$$

$$w_{DL}=-\frac{5}{3}=z^*_{RL}\le z^*=-1$$

O Dual Lagrangeano é um problema não linear!



Exemplo

- Fixando $u=4/3$, e resolvendo PLI(u)

$$z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x}\in X}{Min}\left\{ x_1 - 2x_2 + \frac{4}{3}\left(-x_1 + x_2\right)\right\}$$

Solver...

$$\tilde{\mathbf{x}} = (1\,;2)$$

$$\tilde{z}(4/3) = -\frac{5}{3}$$

- Do Solver podemos ver que a restrição relaxada não é verificada!

- Haverá algum valor para u para o qual a SO de PLI(u) seja a SO de PLI?
- E se tivéssemos relaxado a 2ª restrição em vez da 1ª?

Exemplo

- Graficamente – PLI(u)

$$\tilde{z}(4/3) = Min\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

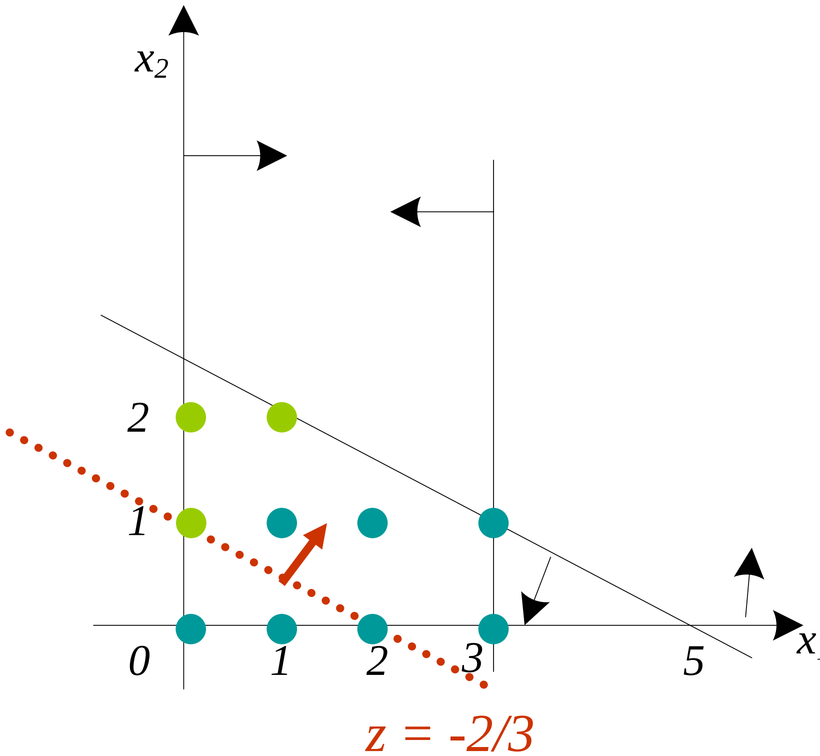
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$

Exemplo

- Graficamente – PLI(u)

$$\tilde{z}(4/3) = Min\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_0^+ \end{cases}$$



$$\tilde{\mathbf{x}} = (1\,;2) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{x}} = (3\,;1)$$

$$\tilde{z}(4/3) = -\frac{5}{3} = z_{RL}$$

Teor. Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI($\tilde{\mathbf{u}}$) e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. (complementaridade) $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI.

<u>Prova</u>: ...

Teor. Forte da Dualidade Lagrangeana: Se $\tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0}$,

i. $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI($\tilde{\mathbf{u}}$) e

ii. $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{0}$ (SPA) e

iii. (complementaridade) $\tilde{\mathbf{u}}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}\right) = \mathbf{0}$

então, $\tilde{\mathbf{x}}$ é S.O. de PLI.

<u>Prova</u>: $w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}} \{z(\mathbf{u})\} \geq z(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}\right) \underset{\text{(iii)}}{=} \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}} \underset{\text{(ii)}\,\tilde{\mathbf{x}}\text{ é SA de PLI}}{\geq} z^*$

Sendo relaxação, $w_{DL} \leq z^* \Rightarrow w_{DL} = z^*$

OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exercícios

1. Escrever o Dual Lagrangeano considerando os seguintes casos:
   a) Problema inicial de Maximização em que se relaxam restrições de tipo $\leq$
   b) Problema inicial de Minimização em que se relaxam restrições de tipo $\leq$
   c) Problema inicial de Maximização em que se relaxam restrições de tipo $\geq$
   d) Problema inicial de Minimização em que se relaxam restrições de tipo =

2. Definir o dual Lagrangeano do seguintes PLI, dualizando as restrições assinaladas (*):

a) $Min \;\; z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 3 \;\; (*) \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 3 \;\; (*) \\ x_j \in \{0, 1\} \;\; j = 1, 2 \end{cases}$$

b) $Max \;\; z = 16x_1 + 10x_2 + 4x_4$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 \;\; (*) \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{B} \end{cases}$$

c) $Min \;\; 8x_{11} + 7x_{21} + 4x_{22} + x_{31} + 3x_{32} + 36y_1 + 12y_2 + 36y_3$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 6 \;\; (*) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 6 \;\; (*) \\ x_{11} + x_{12} \leq 12y_1 \\ x_{21} + x_{22} \leq 12y_2 \\ x_{31} + x_{32} \leq 12y_3 \\ 0 \leq x_{ij} \leq 6 \;\; i = 1, 2, 3; \; j = 1, 2 \\ y_i \in \{0, 1\} \;\; i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

• Identificar este problema como uma instância de um problema estudado, definindo as variáveis de forma compatível.

3. Resolver os problemas relaxados do exercício 2 considerando, em cada alínea, os multiplicadores seguintes:

   a) i) $\mathbf{u} = (1, 1)$; ii) $\mathbf{u} = (0, 1)$; iii) $\mathbf{u} = (0, 1/2)$; iv) $\mathbf{u} = (3/7, 3/7)$.

   b) $\forall\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

   c) $\mathbf{u} = (4, 6)$.